

## II (районний) етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з інформатики

Київ, 15 грудня 2013 р.

---

Максимальна оцінка за кожну з чотирьох задач — 100 балів.

Для всіх задач обмеження на час — 1 секунда / тест; обмеження на пам'ять — 256 МБ.

Результати олімпіади, розв'язки задач і набір тестів буде оприлюднено на сайті [soi.org.ua](http://soi.org.ua).

Автор задач — Данило Мисак.

---

### 1. Письмо (назва програми: `writing.pas` / `writing.cpp`)

На уроці письма й каліграфії Петрик один або кілька разів поспіль виписав у зошиті одне й те саме натуральне число. В результаті утворилося шестицифрове число  $n$ . Допоможіть учительці з'ясувати, яке найменше число міг виписувати Петрик.

#### Вхідні дані

У вхідному файлі вказане шестицифрове натуральне число  $n$ .

#### Вихідні дані

У вихідний файл виведіть найменше натуральне число, яке міг виписувати Петрик.

#### Приклади

Вхідний файл <code>writing.in</code>	Вихідний файл <code>writing.out</code>
333333	3
525252	52
171171	171
240982	240982

### 2. Література (назва програми: `reading.pas` / `reading.cpp`)

Щоб уникнути чергової двійки з літератури, Петрик має виконати домашнє завдання: вибрати з хрестоматії два різних твори загальним обсягом  $s$  сторінок і прочитати їх. Знаючи обсяг кожного з  $n$  творів, що є в хрестоматії, допоможіть хлопцю з'ясувати, скільки він має варіантів вибору.

#### Вхідні дані

У першому рядку вхідного файлу вказано натуральні числа  $s$  та  $n$ , не менші за 2. У другому рядку записано  $n$  натуральних чисел — обсяги (кількості сторінок) відповідних творів із хрестоматії. Усі числа у вхідному файлі (включно з числами  $s$  та  $n$ ) не перевищують 200 000.

#### Вихідні дані

У вихідний файл виведіть єдине число — кількість способів вибрати з хрестоматії пару творів загальним обсягом рівно  $s$  сторінок. Відомо, що ця кількість не перевищує  $10^9$ .

### Приклади

Вхідний файл <code>reading.in</code>	Вихідний файл <code>reading.out</code>
4 5 2 2 3 2 1	4
10 3 6 2 10	0

### Пояснення до прикладів

У першому прикладі Петрик може вибрати один із чотирьох варіантів: прочитати перший і другий твори з хрестоматії; або перший і четвертий; або другий і четвертий; або третій і п'ятий.

У другому прикладі жодні два твори не дають у сумі рівно 10 сторінок.

## 3. Фізкультура (назва програми: `pe.pas` / `pe.cpp`)

На уроці фізкультури учні вишуквалися в шеренгу в деякому зручному для них порядку. Конче потрібно, однак, щоб усі стояли за зростом — у порядку від найвищого учня до найнижчого. Для цього вчитель може один або кілька разів зробити таке: назвати ім'я деякого учня і попросити його перейти в кінець шеренги. За яку найменшу кількість подібних дій учителю вдасться впорядкувати шеренгу бажаним чином?

Зріст кожного з  $n$  учнів відомий. Якщо кілька з них однакового зросту, то між собою такі учні в кінцевому розташуванні можуть стояти в довільному порядку (на вибір учителя). За бажання вчитель може переставляти одного й того самого учня кілька разів.

### Вхідні дані

У першому рядку вхідного файлу вказано натуральне число  $n$ , не менше за 2 і не більше за 200 000. У другому рядку записано  $n$  натуральних чисел, що не перевищують  $2 \cdot 10^9$ , — зріст кожного з  $n$  учнів у порядку, в якому вони стоять у шерензі на початку уроку.

### Вихідні дані

У вихідний файл виведіть єдине число — найменшу кількість переставлянь, які доведеться зробити вчителю, щоб упорядкувати шеренгу за незбільшенням зросту учнів.

### Приклади

Вхідний файл <code>pe.in</code>	Вихідний файл <code>pe.out</code>
7 126 145 141 134 130 141 134	3
3 173 172 169	0

### Пояснення до прикладів

У першому прикладі вчитель може діяти так: спочатку переставити в кінець шеренги першого з двох учнів зросту 134, далі переставити учня зросту 130, а потім — 126. Швидше ніж за три дії впорядкувати шеренгу вчителю не вдасться.

У другому прикладі учні відразу стоять у потрібному порядку. Переставляти нікого не потрібно.

## 4. Математика (назва програми: `math.pas` / `math.cpp`)

Щоб заробити чергові дванадцять балів з математики, Петрик має розв'язати багато однотипних задач на переливання. Типова задача з Петрикового підручника виглядає так.

Є три порожні посудини місткістю  $a$ ,  $b$  та  $c$  літрів. За одну операцію можна виконати якусь із трьох дій:

- Повністю заповнити одну з посудин водою з джерела. До операції посудина може бути або порожньою, або вже частково наповненою. Кількість води у джерелі необмежена.
- Вилити з однієї з посудин усю воду, що в ній міститься. До операції посудина не обов'язково має бути повністю заповненою.
- Перелити з однієї посудини в іншу рівно стільки води, щоб або посудина, куди переливають воду, повністю заповнилася, або — якщо води для цього недостатньо — посудина, звідки переливають воду, спорожніла.

Операції кожного з трьох типів можна виконувати як завгодно багато разів. Треба з'ясувати, за яку найменшу кількість операцій і чи можливо взагалі «відміряти»  $n$  літрів, тобто зробити так, щоб принаймні в одній посудині опинилося рівно  $n$  літрів води.

### Вхідні дані

У першому рядку вхідного файлу записано три натуральних числа  $a$ ,  $b$  та  $c$ , а у другому рядку — натуральне число  $n$ . Усі чотири числа не перевищують 100.

### Вихідні дані

У вихідний файл виведіть єдине число — найменшу кількість операцій, які потрібно провести з посудинами, щоб в одній з них опинилося рівно  $n$  літрів води. Якщо цього досягти неможливо, виведіть число 0.

### Приклади

Вхідний файл <code>math.in</code>	Вихідний файл <code>math.out</code>
4 6 9 7	4
3 10 3 1	5
5 4 7 9	0

### Пояснення до прикладів

У першому прикладі відміряти 7 літрів можна щонайменше за 4 кроки. Наприклад, таким чином:

- 1) Налити воду в 4-літрову посудину.
- 2) Перелити з неї усі 4 літри води в 6-літрову посудину.
- 3) Налити воду в 9-літрову посудину.
- 4) Перелити з неї 2 літри в 6-літрову посудину (та заповниться). У 9-літровій посудині залишиться рівно 7 літрів води.

У другому прикладі відміряти 1 літр можна щонайменше за 5 операцій. Приміром, так:

- 1) Налити воду в 10-літрову посудину.
- 2) Перелити з неї 3 літри в першу посудину.
- 3) Перелити з неї ж іще 3 літри в третю посудину. У 10-літровій посудині залишиться 4 літри води.
- 4) Вилити воду з першої 3-літрової посудини.
- 5) Перелити 3 літри води з 10-літрової посудини в порожню 3-літрову. У 10-літровій залишиться 1 літр.

У третьому прикладі кількість літрів, яку потрібно відміряти, перевищує місткість кожної з трьох посудин. Тож відміряти відповідну кількість води, очевидно, не вдасться.

# Ідеї розв'язання

## 1. Письмо

З умови задачі випливає, що шукане число може бути лише одноцифровим, двоцифровим, трицифровим або шестицифровим.

**Прямий спосіб** розв'язання задачі передбачає розбиття зчитаного числа  $n$  на цифри (або посимвольне його зчитування) і порівняння між собою пар цифр:

- якщо всі цифри числа  $n$  однакові, то відповідь одноцифрова і дорівнює першій цифрі числа  $n$ ;
- інакше якщо третя і п'ята цифри числа  $n$  дорівнюють першій, а четверта і шоста — другій, то відповідь двоцифрова і дорівнює числу, яке утворюють перші дві цифри числа  $n$ ;
- інакше якщо четверта цифра числа  $n$  дорівнює першій, п'ята — другій, а шоста — третій, то відповідь трицифрова і дорівнює числу, яке утворюють перші три цифри числа  $n$ ;
- інакше відповідь шестицифрова і дорівнює самому числу  $n$ .

**Математичний спосіб** розв'язання ґрунтується на спостереженні, що шестицифрове число  $n$  дорівнює добутку числа-відповіді та одного з таких чотирьох чисел: 111 111 (якщо відповідь одноцифрова), 10 101 (якщо відповідь двоцифрова), 1001 (якщо відповідь трицифрова) або просто 1 (якщо відповідь шестицифрова). Таким чином, відповіддю є частка числа  $n$  та першого з чисел 111 111, 10 101, 1001, 1, на яке  $n$  ділиться без остачі.

## 2. Література

Безпосередній перебір принесе лише частковий бал, бо для великих  $n$  програма не встигне за відведений час (секунду) перебрати всі можливі пари чисел. Замість цього можна скористатися іншим підходом. Для кожного числа від 1 до 200 000 слід підрахувати, скільки творів мають даний обсяг: завести масив  $cnt$ , у комірці  $cnt[p]$  якого буде зберігатися кількість творів обсягу  $p$  ( $1 \leq p \leq 200\,000$ ), і після зчитування кожного наступного числа збільшувати відповідну комірку масиву на 1. Далі через  $\left\lfloor \frac{s-1}{2} \right\rfloor$  ми позначаємо найбільше ціле число, що не перевищує  $\frac{s-1}{2}$ . Для всіх значень  $p$  у межах від 1 до  $\left\lfloor \frac{s-1}{2} \right\rfloor$  включно добуток  $cnt[p] \cdot cnt[s-p]$  дорівнюватиме кількості пар творів, один із яких має обсяг  $p$ , а інший — обсяг  $s-p$  сторінок; при цьому  $p < s-p$ . Сума всіх  $\left\lfloor \frac{s-1}{2} \right\rfloor$  таких добутків буде кількістю варіантів вибрати пару творів сумарним обсягом  $s$  сторінок за умови, що обсяги цих двох творів різні. Залишається врахувати пари творів однакового обсягу: якщо  $s$  непарне, таких пар немає, а інакше їх рівно  $\frac{cnt[s/2] \cdot (cnt[s/2]-1)}{2}$ .

## 3. Фізкультура

Передусім зауважимо, що переставляти одного й того самого учня кілька разів учителю не знадобиться: із послідовності дій можна вилучити всі переставляння даного учня, крім останнього, не збільшивши загальної кількості дій і не змінивши кінцевого результату. Стане в пригоді й таке спостереження: всі учні, яких учитель не переставляв у кінець шеренги, в підсумку будуть стояти на її початку, причому в тому ж відносному порядку, в якому вони стояли до переставлянь. Отже, це найвищі з усіх учні, що стоять у порядку незбільшення зросту. І навпаки: якщо в початковій шерензі ми зафіксуємо і не будемо рухати кількох найвищих учнів, що стоять у порядку незбільшення зросту, а інших переставлятимемо в кінець шеренги в порядку від найвищого до найнижчого, то в підсумку впорядкуємо учнів потрібним чином. Найменшій кількості переставлянь відповідає при цьому найдовша послідовність найвищих учнів, що стоять у порядку незбільшення зросту: якщо таких учнів  $k$ , то шукана кількість дій дорівнює  $n - k$ . Залишається знайти найдовшу таку послідовність, тобто число  $k$ .

**Розв'язання сортуванням.** Послідовність чисел, подану у вхідному файлі, можна занести відразу у два масиви, причому після зчитування один з них слід відсортувати за незростанням. Рухаючись зліва на-

право у невідсортованому масиві, треба додавати до лічильника (змінної  $k$ ) одиницю кожного разу, коли натрапляємо на чергове число з відсортованого масиву.

Відзначимо, що просте сортування за квадратичний час дасть лише частковий бал, тож потрібно використати впорядкування злиттям або інший швидкий метод сортування масиву.

**Розв'язання зі стеком.** Назвімо найдовшу послідовність найвищих учнів, що стоять у порядку незбільшення зросту, суперпідпоследовністю даної послідовності. Суперпідпоследовність можна побудувати за один прохід вхідного масиву, тобто відразу під час зчитування файлу. Зчитавши перші  $p$  чисел вхідної послідовності, ми матимемо такі дані:

- стек  $s$ , що містить суперпідпоследовність послідовності з уже зчитаних  $p$  чисел (якщо  $p = 0$ , стек порожній);
- змінну  $m$ , яка дорівнює найбільшому з тих уже зчитаних чисел, які не входять у стек  $s$  (якщо  $p = 0$ , покладемо  $m = 0$ ).

Очевидно, за таких умов після зчитування всіх  $n$  чисел змінна  $s$  буде містити саме ту послідовність, яку й потрібно відшукати. Залишається розібратися, як підтримувати змінні  $s$  та  $m$  в актуальному стані. Після зчитування  $(p + 1)$ -го числа, яке позначимо через  $h$ , їх слід оновити таким чином:

- 1) Зі стека  $s$  видалити всі числа, що строго менші за  $h$ . При цьому, якщо доведеться, відповідним чином збільшити значення  $m$ .
- 2) Якщо  $h$  не менше за  $m$ , додати його в стек; інакше проігнорувати.

Покажемо, що якщо після  $p$ -го кроку стек  $s$  містить суперпідпоследовність перших  $p$  чисел, то після  $(p + 1)$ -го кроку стек міститиме суперпідпоследовність нової послідовності з  $p + 1$  числа. Насамперед, як впливає зі схеми роботи алгоритму, жодне число зі стека не може бути меншим за поточне значення змінної  $m$ . Тепер випишемо можливі варіанти:

- число  $h$  є строго більшим за останній (найменший) елемент стека;
- число  $h$  не перевищує останній елемент стека, але й не менше за  $m$ ;
- число  $h$  є меншим за  $m$ .

Можна переконатися, що в кожному з цих трьох випадків алгоритм справді потрібним чином оновлює вміст стека.

Насамкінець додамо, що алгоритм працює лінійний час: кожне число послідовності додають у стек та видаляють із нього щонайбільше по одному разу. Саме в цьому полягає перевага даного способу розв'язання перед концептуально простішим методом сортування.

## 4. Математика

*Станом* назвімо впорядковану трійку чисел  $(x; y; z)$ , де  $x$ ,  $y$  та  $z$  — кількості літрів води у першій, другій і третій посудинах відповідно. Якщо зі стану  $A$  за одну операцію з посудинами можна дістати стан  $B$ , казатимемо, що стан  $B$  *досяжний* зі стану  $A$ .

Для розв'язання задачі можна використати алгоритм, аналогічний пошуку в ширину на графі:

1) Заведемо чергу, в якій зберігатимемо стани — трійки цілих чисел. На практиці можна використати три окремих черги, елементами яких є цілі числа (відповідні компоненти трійок), і використовувати ці черги паралельно. Додамо в чергу початковий стан  $(0; 0; 0)$ .

2) Розглянемо стан  $A$ , що є на даний момент першим у черзі, і видалимо його з черги. Додамо в чергу всі стани, які досяжні зі стану  $A$  і які ми не додавали в чергу раніше. Запам'ятаємо, що кількість операцій, необхідна для одержання з початкового стану  $(0; 0; 0)$  кожного з цих станів, на 1 більша, ніж для самого стану  $A$ . Щоби пам'ятати цю кількість, можна використати, наприклад, тривимірний масив, індексами якого слугує трійка чисел, що задає стан, а значенням комірки є відповідна кількість операцій. Цей же масив дозволить визначати, чи ми вже додавали в чергу той чи інший стан.

3) Якщо до черги було додано трійку, хоча б один компонент якої дорівнює  $n$ , відповідь знайдено (це кількість операцій, необхідна для досягнення даної трійки). Якщо черга спорожня, а відповідь так і не знайдено, то відміряти  $n$  літрів води неможливо. Якщо ж черга ще не спорожня і відповідь поки не знайдено, повертаємось до другого кроку алгоритму.

Додамо, що немає потреби окремо розглядати випадок  $n > \max\{a; b; c\}$  або інші, коли відразу зрозуміло, що  $n$  літрів відміряти неможливо: алгоритм і так це з'ясує.

Щоб оцінити час виконання алгоритму, зауважимо, що з кожного стану можна дістати щонайбільше 12 інших: по 3 для операцій наповнення й виливання води та 6 для операцій переливання. Тому в найгіршому випадку — якщо  $n$  літрів відміряти важко або неможливо — час буде пропорційним загальній кількості досяжних станів (тобто всіх таких, які можна отримати з початкового стану  $(0; 0; 0)$  за одну чи кілька послідовних операцій). Число ж досяжних станів не перевищує добутку  $(a + 1)(b + 1)(c + 1)$ .